

अनुक्रमांक

नाम

131

324(XA)

2020

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] [पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

- निर्देश :
- इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
 - सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
 - प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
 - प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
 - जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :

- There are in all nine questions in this question paper.

324(XA)

2

- All questions are compulsory.
- In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.
- Marks allotted to the questions are indicated against them.
- Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) मान लीजिए कि $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f: R \rightarrow R$ है। तब f

- एकैकी आच्छादक है
- बहु-एक आच्छादक है
- एकैकी है परंतु आच्छादक नहीं है
- न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

1

ख)

$$\cos\theta \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$$

का मान है

- $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- इनमें से कोई नहीं।

1

ग) समाकलन $\int \sqrt{1 + \sin 2x} dx$ का मान है

- i) $\sin x + \cos x + c$
 ii) $\sin x - \cos x + c$
 iii) $\cos x - \sin x + c$
 iv) $-\sin x - \cos x + c$ 1

घ) अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} = 4\sqrt{x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

का घात है

- i) 4 ii) 3
 iii) 2 iv) 1. 1

ङ) यदि सदिश $5\hat{i} - \lambda\hat{j} + 2\hat{k}$ और

$2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ एक दूसरे पर लम्ब हैं, तो λ

का मान है

- i) 3 ii) 4
 iii) 6 iv) 0. 1

1. Attempt all the parts :

a) Suppose that the function

$f: R \rightarrow R$ is defined by $f(x) = x^2$.

Then f is

- i) one-one onto
 ii) many-one onto
 iii) one-one, but not onto
 iv) neither one-one nor onto. 1

b) The value of

$$\cos \theta \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} + \sin \theta \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

is

- i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
 iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ iv) none of these. 1

c) The value of integral

$$\int \sqrt{1 + \sin 2x} dx \text{ is}$$

- i) $\sin x + \cos x + c$
 ii) $\sin x - \cos x + c$
 iii) $\cos x - \sin x + c$
 iv) $-\sin x - \cos x + c$. 1

d) The degree of the differential

$$\text{equation } \frac{d^2y}{dx^2} = 4\sqrt{x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \text{ is}$$

- i) 4 ii) 3
 iii) 2 iv) 1. 1

e) If vectors $5\hat{i} - \lambda\hat{j} + 2\hat{k}$ and

$2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ are perpendicular to each other, then value of λ is

- i) 3 ii) 4
 iii) 6 iv) 0. 1

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

1

ख) फलन $f : R \rightarrow R$ इस प्रकार है की $f(x) = x^2 + 2$ है, तो $f^{-1}(18)$ को ज्ञात कीजिए।

1

ग) यदि A और B दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.8$ और $P(B/A) = 0.6$, तो $P(A \cup B)$ ज्ञात कीजिए।

1

घ) समीकरण $y = Ae^x + B$ से सम्बन्धित अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ A, B अचर हैं।

1

ङ) फलन $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ के लिए दिखाइए कि यह $x = 0$ पर सतत नहीं है।

1

2. Attempt all the parts :

a) Find the principal value of $\sin^{-1}\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

1

b) Function $f : R \rightarrow R$ is such that $f(x) = x^2 + 2$, then find $f^{-1}(18)$.

1

c) If A and B are two events such that $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.8$ and $P(B/A) = 0.6$, then find $P(A \cup B)$.

d) Find the differential equation, related to equation $y = Ae^x + B$, where A, B are constants.

1

e) Show that for the function

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ at } x = 0$$

is not continuous.

1

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $y = \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}\right)$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

2

ख) सदिशों $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ और $3\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

2

ग) निम्न अवरोधों

$$x + y \leq 8$$

$$3x + 5y \geq 15$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

के अन्तर्गत $Z = x + 3y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

2

घ) p का मान ज्ञात कीजिए यदि रेखाएँ

$$\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2} \text{ और}$$

$$\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5} \text{ परस्पर लम्ब हैं।}$$

3. Attempt all the parts :

a) If $y = \cot^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{x} \right)$, then find

the value of $\frac{dy}{dx}$. 2

b) Find the angle between the vectors $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ and $3\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$. 2

c) Under the following restriction
 $x + y \leq 8$
 $3x + 5y \geq 15$
 $x \geq 0, y \geq 0$

find the minimum value of $Z = x + y$. 2

d) Find the value of p if the lines

$$\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2} \text{ and}$$

$$\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5} \text{ are mutually perpendicular to each other. 2}$$

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) एक कक्षा में 40% विद्यार्थी गणित, 20% विद्यार्थी जीव विज्ञान और 10% विद्यार्थी गणित और जीव विज्ञान दोनों पढ़ते हैं। यादृच्छया एक विद्यार्थी चुना जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

i) वह गणित पढ़ता है जबकि यह ज्ञात है कि वह जीव विज्ञान पढ़ता है

ii) वह जीव विज्ञान पढ़ता है जबकि यह ज्ञात है कि वह गणित पढ़ता है। 1 + 1

ख) $\int \frac{\sin(x-a)}{\sin(x+a)} dx$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ a अचर है। 2

ग) उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसके विकर्ण $\vec{d}_1 = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ और $\vec{d}_2 = \hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ हैं। 2

घ) फलन $f(x) = \cos 2x$ के लिए अन्तराल $[0, \pi]$ में रोले के प्रमेय को सत्यापित कीजिए। 2

4. Attempt all the parts :

a) In a class 40% students read mathematics, 20% read biology and 10% read both mathematics and biology. One student is selected at random. Find the probability that

i) he reads mathematics, when it is known that he reads biology

ii) he reads biology when it is known that he reads mathematics. 1 + 1

b) Find the value of $\int \frac{\sin(x-a)}{\sin(x+a)} dx$, where a is constant. 2

- c) Find the area of that parallelogram whose diagonals are $\vec{d}_1 = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{d}_2 = \hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$. 2
- d) Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = \cos 2x$ in the interval $[0, \pi]$. 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $\cos^{-1} \frac{x}{a} + \cos^{-1} \frac{y}{b} = \theta$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \theta + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \theta$, 5

ख) सिद्ध कीजिए कि
$$\begin{vmatrix} a+b & b & c \\ b+c & c & a \\ c+a & a & b \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$
. 5

ग) सिद्ध कीजिए कि
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x}}{1 + \sqrt{\cot x}} dx = \frac{\pi}{4}$$
. 5

घ) सिद्ध कीजिए कि यदि वक्र $y = x^3$ और $xy = k$ एक दूसरे को लम्बवत् काटते हैं तो $3k = 1$. 5

ड) रेखाओं $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ और $\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5

घ) अवकल समीकरण $x \frac{dy}{dx} = y - x \cos^2 \left(\frac{y}{x} \right)$ को हल कीजिए। 5

5. Attempt any five parts of the following :

a) If $\cos^{-1} \frac{x}{a} + \cos^{-1} \frac{y}{b} = \theta$, then prove that $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \theta + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \theta$. 5

ब) Prove that
$$\begin{vmatrix} a+b & b & c \\ b+c & c & a \\ c+a & a & b \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$
.

c) Prove that
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x}}{1 + \sqrt{\cot x}} dx = \frac{\pi}{4}$$
.

d) If curve $y = x^3$ and $xy = k$ cut each other perpendicularly, then prove that $3k = 1$.

- e) Find the shortest distance between the lines

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \text{ and}$$

$$\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}). \quad 5$$

- f) Solve the differential equation

$$x \frac{dy}{dx} = y - x \cos^2\left(\frac{y}{x}\right). \quad 5$$

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

- (क) दिखाइए कि फंक्शन

$$f(x) = |x - 2| = \begin{cases} x - 2, & x \geq 2 \\ -(x - 2), & x < 2 \end{cases}$$

$x = 2$ पर सतत है परन्तु अवकलनीय नहीं है।

5

- (ख) आलेखीय विधि द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत हल कीजिए :

$$x + 3y \leq 60$$

$$x + y \geq 10$$

$$x \leq y$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$Z = 3x + 9y$ का न्यूनतम और अधिकतम

मान ज्ञात कीजिए।

5

- ग) वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ के प्रथम चतुर्थांश में स्थित भाग और सरल रेखा $y = x$ तथा x -अक्ष से घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

- (घ) एक थैले में 5 लाल, 4 काली और 3 सफेद गेंदें हैं। यदि एक के बाद एक 3 गेंदें निकाली जाएँ तथा निकाली गई गेंदों को पुनः थैले में वापस नहीं रखा जाता है, तो तीनों गेंदों के लाल निकलने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5

- ड) सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ और

$\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ पर लम्ब इकाई सदिश ज्ञात कीजिए, तथा उनके बीच के कोण की ज्या (sine) भी ज्ञात कीजिए। 5

- (च) समीकरण

$$\sec^{-1} \frac{x}{a} - \sec^{-1} \frac{x}{b} = \sec^{-1} b - \sec^{-1} a$$

को हल कीजिए।

6. Attempt any five parts of the following:

- a) Show that the function

$$f(x) = |x - 2| = \begin{cases} x - 2, & x \geq 2 \\ -(x - 2), & x < 2 \end{cases}$$

at $x = 2$ is continuous but not differentiable.

- b) Solve the following linear programming problem by graphical method, under the following constraints :

$$x + 3y \leq 60$$

$$x + y \geq 10$$

$$x \leq y$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Find the minimum and maximum values of $Z = 3x + 9y$. 5

- c) Find the area enclosed in the first quadrant of circle $x^2 + y^2 = 4$ and straight line $y = x$ and axis of x . 5

- d) In a bag there are 5 red, 4 black and 3 white balls. If one by one three balls are taken out and not again returned to the bag, then find the probability that all the three balls drawn are red. 5

- e) Find the perpendicular unit vector on the vectors $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ and find the sine of the angle between them. 5

- f) Solve the equation

$$\sec^{-1} \frac{x}{a} - \sec^{-1} \frac{x}{b} = \sec^{-1} b - \sec^{-1} a.$$

5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- क) निम्नलिखित समीकरण निकाय

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 4.$$

को आव्यूह विधि से हल कीजिए। 8

- ख) i) यदि शीर्ष $(2, -6)$, $(5, 4)$ और $(k, 4)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो तो k का मान ज्ञात कीजिए। 3

- ii) यदि $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$,
 $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ और
 $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$, तो एक सदिश
 \vec{d} ज्ञात कीजिए जो सदिशों \vec{a} और \vec{b}
दोनों पर लम्ब है, और $\vec{c} \cdot \vec{d} = 15$ है। 5

7. Attempt any one part of the following :

- a) Solve the following system of equations by matrix method :

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 4. \quad 8$$

- b) i) If area of the triangle, whose vertices are $(2, -6)$, $(5, 4)$ and $(k, 4)$ is 35 square unit, then find the value of k . 3

- ii) If $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$,
 $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ and
 $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$, then find a
 vector \vec{d} which is

perpendicular to vectors \vec{a}
 and \vec{b} both and $\vec{c} \cdot \vec{d} = 15$. 5

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

ख) i) फलन x^x का निम्निष्ठ मान ज्ञात
 कीजिए। 4

ii) 52 ताशों की एक गड्डी में से एक के
 बाद एक दो पत्ते निकाले जाते हैं। यदि
 उन्हें निकालने के बाद पुनः ताश की गड्डी
 में नहीं रखा जाता है, तो दोनों पत्ते पान
 के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 4

8. Attempt any one part of the following :

a) Find the value of $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx$.

8

- b) i) Find the minimum value of
 the function x^x . 4
 ii) From a pack of 52 playing
 cards, two are drawn one by
 one. After drawing they are
 not returned to the pack
 again, then find the
 probability of both cards to be
 betel. 4

9. किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) $\int_a^b x^2 dx$ का योगफल की सीमा के रूप में
 निश्चित समाकल की सहायता से मान ज्ञात
 कीजिए। 8

ख) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$ का
 व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 8

9. Attempt any one part of the following :

a) Find the value of $\int_a^b x^2 dx$ with the
 help of definite integral as the limit
 of a sum.

b) Find the general solution
 of the differential equation
 $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$. 8